

CATÉGORISATION DE PROBLÈMES SELON LEUR STRUCTURE RELATIONNELLE ET ANTICIPATION DES FORMES DE RAISONNEMENT MOBILISÉES

Mélanie Tremblay

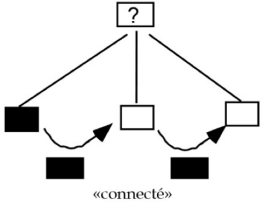
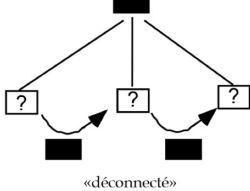
Melanie_tremblay@uqar.ca

Ce document présente différentes **classes de problèmes** à partir des travaux de Vergnaud (1982). Il intègre la nomenclature exprimée en termes de différents « sens » pour chaque structure, telle qu'elle est présentée dans la progression des apprentissages (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009).

Les exemples de problèmes sont accompagnés des schémas de Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Polotskaia, 2009). Ces **schémas « range-tout »** peuvent être introduits en classe pour soutenir le raisonnement des élèves, mais nous ne suggérons pas d'imposer leur utilisation. La schématisation présente l'avantage d'être adaptable à des problèmes de structures sémantiques variées et d'aider les élèves à se focaliser sur les relations entre les quantités connues et inconnues.

Les exemples associés aux classes de problèmes sont également enrichis par les travaux sur la **schématisation relationnelle** de Bednarz et Janvier (1992), qui invitent à porter une attention particulière aux **grandeurs en jeu** et aux **relations entre ces grandeurs**, selon qu'elles sont connues ou inconnues. Ces chercheuses distinguent ainsi les **problèmes connectés**, qui peuvent être résolus à l'aide d'un raisonnement arithmétique, des **problèmes déconnectés**, qui favorisent l'expression d'un **raisonnement algébrique**.

La schématisation relationnelle permet de rendre visible cette distinction : les cases foncées correspondent aux données fournies dans l'énoncé (connues), tandis que les cases blanches représentent les données inconnues, qu'il s'agisse de grandeurs mentionnées ou de relations entre ces grandeurs.

	Problème connecté	Problème déconnecté
Définition	Une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement possible de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir à la suite de calculs à la donnée inconnue.	Aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème
Schématisation (Bednarz et Janvier, 1996, p. 123)	Problèmes généralement présentés en arithmétique  «connecté»	Problèmes généralement présentés en algèbre (utilisant le même type de relations)  «déconnecté»
Raisonnement	Arithmétique - S'appuie sur des nombres donnés et leurs relations immédiates. - Les calculs sont réalisés sur des grandeurs connues (nombres donnés)	Analytique/algébrique - S'appuie sur l'établissement de relations entre des grandeurs, connues et inconnues. - La résolution implique l'identification d'un générateur, c'est-à-dire une grandeur de référence à partir de laquelle les autres sont interprétées grâce à la mise en relation.

Les différentes classes de problèmes usuellement proposées au secondaire en algèbre sont ensuite traitées. Pour les problèmes de taux, la catégorisation des problèmes de Guzman, Bednarz et Hitt (2003) est exposée.

A. PROBLÈMES DE STRUCTURE RELATIONNELLE ADDITIVE

- Réunion** : La composition de deux états en un troisième état. Une relation statique unit deux états. Vergnaud nomme d'ailleurs cette classe « Composition d'états ».

Exemple 1	Mathie a 6 billes bleues et 18 billes rouges, combien a-t-elle de billes ? <i>Problème connecté</i>	
Exemple 2	Mathias a 24 crayons verts et rouges. Il a 13 des crayons verts. Combien a-t-il de crayons rouges ? <i>Problème connecté</i>	

- Transformation** : Une transformation agit sur un état initial pour produire un état final. La question peut porter sur l'état final ($a + b = ?$), sur la transformation ($a + ? = c$) ou sur l'état initial ($? + b = c$). La transformation peut être additive (gain) ou soustractive (perte).

Exemple 1	Ce matin, Mathie avait 6 billes bleues. Mathias est venu et lui a donné 18 billes rouges, combien a-t-elle de billes maintenant ? <i>Problème connecté</i>	
-----------	---	--

Exemple 2	Mathias avait 38 \$ la semaine dernière. Sa tante est venue le visiter et il a maintenant 50 \$. Quel montant a-t-il reçu de sa tante en cadeau ? <i>Problème connecté</i>	

3. **Composition de transformations** : La première transformation est désignée par T1 qui entraîne un état intermédiaire, la deuxième transformation est désignée par T2 et la transformation résultante est désignée par TR.

Exemple 1	Dans un autobus, il y avait 25 personnes. Un certain nombre de personnes entrent au premier arrêt. Au second arrêt, deux personnes descendent de l'autobus. Au troisième arrêt, 5 personnes montent dans l'autobus. Le chauffeur compte alors le nombre de passagers et constate qu'il y a maintenant 22 personnes dans son autobus. Combien de personnes sont entrées au premier arrêt ? <i>Problème connecté</i>	
-----------	--	--

4. **Comparaison d'états**: La question peut porter sur un des deux états ou sur la relation entre les deux. Il s'agit de comparer des états.

Exemple 1	Mathias a trois ans de plus que Mathie. Cette dernière a 13 ans. Quel âge a Mathias ? <i>Problème connecté</i>	
-----------	--	--

		Âge de Mathie 13 3 ans de plus Âge de Mathias
Exemple 2	Mathie a parcouru 42 km et Mathias 75 km. Combien de kilomètres de moins Mathie a-t-elle parcourus ? <i>Problème connecté</i>	Distance Mathie 42 Distance Mathias 75 ? Distance Mathie 42 km ? 75 km Distance de Mathias

B. PROBLÈMES DE STRUCTURE RELATIONNELLE MULTIPLICATIVE

- Isomorphisme de mesures** : situation multiplicative dans laquelle deux grandeurs de nature différente sont mises en correspondance **terme à terme**.

On calcule une mesure totale, une mesure unitaire ou un nombre d'unités à partir d'un **taux unitaire fixe** entre ces grandeurs. On peut aussi associer l'idée de nombre de paquets et de quantité dans chaque paquet.

1	c
b	?

La progression des apprentissages (MELS, 2009) subdivise cette classe en différents sens de la multiplication en introduisant l'**addition répétée** (action répétée et réunion répétée) comme forme la plus simple de la multiplication puis la **disposition et l'arrangement rectangulaire**.

a. Action répétée

Exemple 1	Mathie reçoit 8 bonbons par jour pendant 6 jours. Combien de bonbons aura-t-elle reçus pendant ces 6 jours ? <i>Problème connecté</i>	8 bonbons par jour 6 jours Total de bonbons
-----------	---	---

b. Réunion répétée

Exemple	Mathias a 5 enveloppes de 8,50 \$. Combien d'argent a-t-il ? <i>Problème connecté</i>	
---------	---	--

c. Disposition ou arrangement rectangulaire : Ce sens se rapproche de l'addition répétée tout en faisant intervenir une disposition géométrique des objets en colonnes et rangées.

Exemple	Mathie a acheté une boîte contenant 3 rangées de 4 beignes. Combien de beignes y a-t-il dans la boîte ? <i>Problème connecté</i>	
---------	--	--

La classe « isomorphisme de mesures » génère aussi des problèmes qui peuvent être modélisés par une division. La progression des apprentissages (MELS, 2009) distingue différents sens associés à la division (soustraction répétée, partage, contenance).

- d. Soustraction répétée :** introduite pour aborder l'introduction de la division. Il s'agit là d'un raccourci de la soustraction répétée. On soustrait des groupes égaux du total jusqu'à ce que l'on obtienne zéro.
- e. Partage :** Partage d'un ensemble d'objets également entre un certain nombre de groupes ou de personnes (je sais en combien de parties je veux partager l'ensemble). Il s'agit de rechercher la valeur d'une part (division-partition).

a	?
b	d

Exemple	J'ai 24 billes. Je veux les distribuer entre 3 personnes. Combien chacune recevra-t-elle de billes ? <i>Problème connecté</i>	
---------	---	--

- f. **Groupes équivalents ou Contenance (mesure) :** À partir nombre total d'objets et du nombre d'objets que doit contenir un groupement, il y a recherche du nombre de groupements qu'il est possible de construire (recherche du nombre de parts).

a	c
?	d

Exemple	J'ai 24 billes. Je veux donner des paquets de 8 billes. Combien aurai-je de paquets à donner ? <i>Problème connecté</i>	8 billes par personne Nombre de personnes ? 24 billes
---------	---	--

2. **Produit cartésien - Combinaison :** Il s'agit de trouver le nombre de combinaisons différentes formées en associant chaque élément d'un ensemble avec chaque élément d'un autre. C'est un produit de cardinalités.

Exemple 1	En vacances, Mathias apporte 3 pantalons et 4 chandails. Combien d'ensembles différents pourra-t-il porter ? Problème connecté	P1 branches to C1, C2, C3, C4 P2 branches to C1, C2, C3, C4 P3 branches to C1, C2, C3, C4 OU <table><tr><th></th><th>C1</th><th>C2</th><th>C3</th><th>C4</th></tr><tr><th>P1</th><td>C1 P1</td><td>C2 P1</td><td>C3 P1</td><td>C4 P1</td></tr><tr><th>P2</th><td>C1 P2</td><td>C2 P2</td><td>C3 P2</td><td>C4 P2</td></tr><tr><th>P3</th><td>C1 P3</td><td>C2 P3</td><td>C3 P3</td><td>C4 P3</td></tr></table>		C1	C2	C3	C4	P1	C1 P1	C2 P1	C3 P1	C4 P1	P2	C1 P2	C2 P2	C3 P2	C4 P2	P3	C1 P3	C2 P3	C3 P3	C4 P3
	C1	C2	C3	C4																		
P1	C1 P1	C2 P1	C3 P1	C4 P1																		
P2	C1 P2	C2 P2	C3 P2	C4 P2																		
P3	C1 P3	C2 P3	C3 P3	C4 P3																		
Exemple 2	Mathie a conçu 48 menus différents de 2 services. Trois desserts sont proposés. Combien de plats principaux sont offerts par le restaurant ? Problème connecté	? plats principaux 3 desserts 48 menus différents																				

3. **Produit de mesures :** situation dans laquelle deux grandeurs mesurables sont composées pour produire une troisième grandeur, généralement d'une nature différente. La multiplication ne sert pas à répéter une quantité (comme c'est le cas, du sens isomorphisme de mesures).

Sans nommer cette classe, la progression des apprentissages distingue le sens aire et le sens volume que nous regroupons ici.

a. Aire et volume

Exemple 1	Le jardin de Mathie mesure 6 mètres de largeur sur 10 mètres de longueur. Quelle est l'aire de son jardin ? <i>Problème connecté</i>	
Exemple 2	Une boîte ayant la forme d'un prisme à base rectangulaire est composée de 24 dm³. Sa longueur est de 4 décimètres et sa hauteur est de 3 décimètres. Quelle est la profondeur de cette boîte ? <i>Problème connecté</i>	

4. **Comparaison multiplicative**¹ : Problème qui met en jeu deux grandeurs (ou plus) de même nature (deux collections, deux mesures, etc.) liées par un rapport multiplicatif. Ce sens est lié aux problèmes de multiplication faisant intervenir des expressions telles que *n fois plus* ou *n fois moins*.

Vergnaud considère que ce n'est pas une classe de problème en soi. Selon la nature des grandeurs en jeu, il peut s'agir d'un problème d'isomorphisme de mesures (exemple 1) ou de proportionnalité (exemple 2).

Exemple 1	Mathie a 8 ans. Sa mère a 4 fois son âge. Quel âge a la mère de Manon ? <i>Problème connecté</i>	
-----------	--	--

¹ **Note** : Les problèmes qui visent l'expression d'un raisonnement algébrique impliquent des relations multiplicatives ou des proportionnalités.

		Âge Manon 8 ans 4 fois Âge de la mère
Exemple 2	Mathie a parcouru 93 km et Mathias 31 km. Combien de fois plus grande est la distance parcourue par Mathie? <i>Problème connecté</i>	

- 5. Proportionnalité:** Les situations de proportionnalité reposent sur l'invariance d'un rapport multiplicatif entre deux couples de grandeurs. Ces grandeurs peuvent être de nature différente (par exemple, quantité et prix), mais elles peuvent aussi être de même nature (par exemple, des longueurs dans une situation d'agrandissement à l'échelle).

a	c
b	?

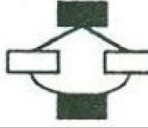
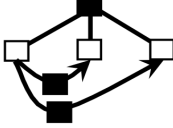
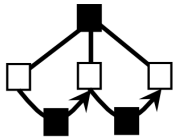
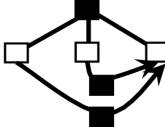
La proportionnalité exige de coordonner deux couples de grandeurs, un raisonnement plus complexe que l'isomorphisme de mesures. Elle requiert la maîtrise de la multiplication et de la division, la compréhension de rapports, de taux unitaires, et de facteurs d'échelle, une capacité à raisonner sur des relations plutôt que des valeurs isolées.

Ces problèmes sont davantage exploités, lire même introduits au secondaire. Les notions de taux unitaire et de rapport constant sont formalisées. L'interprétation graphique sera aussi abordée. Les stratégies de calcul proportionnel (facteur de changement, coefficient de proportionnalité, retour à l'unité, produits croisés) seront développées à partir de différents contextes.

Exemple 1	Pour 4 litres de jus, on paie 6 \$. Combien paierait-on pour 7 litres au même prix au litre ? <i>Problème connecté</i>	x4 Âge Manon 8 ans 4 fois Âge de la mère
Exemple 2	Mathie a parcouru 93 km et Mathias 31 km. Combien de fois plus grande est la distance parcourue par Mathie? <i>Problème connecté</i>	

C. ANALYSE DES PROBLÈMES SELON LEUR POTENTIEL POUR DÉPLOYER UN RAISONNEMENT ALGÈBRIQUE

1. PROBLÈMES DÉCONNECTÉS DE TYPE RÉUNION SELON LE NOMBRE DE GRANDEURS ET LES RELATIONS DE COMPARAISON (additives ou multiplicatives) EN JEU

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	SOURCE Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.	
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
	PUITS Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.	

De plus en plus complexe

Le nombre de relations de comparaison impliquées (impliquant une gestion plus ou moins complexe des données). Ainsi, les problèmes n'impliquant qu'une relation de comparaison entre les données sont des problèmes simples, qui peuvent se résoudre facilement par arithmétique, et motivent peu un passage à l'algèbre.

- La nature des relations entre les données (composition de deux relations additives versus multiplicatives, versus additive et multiplicative) : la composition va apparaître ici plus ou moins complexe à prendre en compte dans le raisonnement.
- L'enchaînement de ces relations (référant à un même générateur ou non, impliquant une composition ou non). Ainsi les problèmes dans lesquels les différentes grandeurs peuvent être générées directement à partir d'une même grandeur (problème de type « source ») apparaissent, pour les élèves, plus simples à gérer.

2. PROBLÈMES DÉCONNECTÉS DE TYPE TRANSFORMATION

Revenez dans ce dossier. Mise à jour 31 octobre 2025

3. PROBLÈMES DÉCONNECTÉS DE TYPE TAUX

Revenez dans ce dossier. Mise à jour 31 octobre 2025

4. PROBLÈMES DÉCONNECTÉS DE TYPE MISE EN ÉGALITÉ

Revenez dans ce dossier. Mise à jour 31 octobre 2025

5. PROBLÈMES DÉCONNECTÉS DE TYPE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Revenez dans ce dossier. Mise à jour 31 octobre 2025